

一种适用于任意色散媒质的新型 FDTD 方法研究

汪 彤, 张文俊, 葛仁伟
(上海大学通信系 277 信箱, 上海 200072)

摘 要: 本文提出一种新的适用于各种复杂色散媒质的时域有限差分法, 将色散媒质表征为一组无限冲激响应滤波器(IIR), 由此导出基于介电常数和导电系数的时域有限差分方程, 并对算法的稳定性条件和数值色散关系进行分析. 这种改进的 FDTD 能分析与频率有关的电磁场问题. 为验证该方法的有效性和可靠性, 本文用冲激响应不变法设计 IIR 滤波器模拟色散媒质, 并对高斯脉冲入射色散媒质的情况进行数值模拟, 结果与解析值完全吻合.

关键词: 色散媒质, 数字信号处理; 时域有限差分法; 无限冲激响应数字滤波器

中图分类号: TN01 文献标识码: A 文章编号: 0372 2112 (2001) 06 0788 04

A New FDTD Method for Arbitrary Dispersive Media

WANG Tong, ZHANG Weir jun, GE Rerr wei
(Shanghai University 277#, Shanghai 200072, China)

Abstract: A new frequency dependent FDTD method using DSP is presented for arbitrary frequency dispersive medium. The dispersive medium is characterized as a set of infinite impulse filters (IIR). Two algorithms employing frequency dependent permittivity and frequency dependent conductivity are derived. Their stability criteria and numerical dispersion are also studied. In order to demonstrate the effectiveness of this approach, several numerical examples are given in this paper.

Key words: dispersive media; FDTD; DSP; IIR

1 引言

时域有限差分法(FDTD)是一种分析时域电磁问题的全波方法. 时域有限差分法^[1,2]对于与频率有关的电磁场问题无法直接应用. 近年来, 人们对与频率有关的 FDTD 法(FD-FDTD)的研究, 并有了相关算法的报道, 如离散卷积^[3,4]、直接差分^[5]和 Z 变换^[6]等. 本文利用数字信号处理(DSP)技术^[7]进行无限冲激响应数字滤波器(IIR)设计, 较为成功地用 IIR 数字滤波器模拟了色散媒质的色散特性. 在此基础上分别推导了基于等效复介电常数和复电导率的两组 FD-FDTD 方程, 并两组方程的稳定性及适用性进行了比较研究.

2 方法

本文主要以均匀、各向同性的电色散媒质(即 $\mu = \mu_0$)为研究对象. 两组 FD-FDTD 方程分别基于: (1) 介电常数滤波器 $D(z) = \varepsilon(z)E(z)$ (方法 1); (2) 电导系数滤波器 $J_c(z) = \sigma(z)E(z)$ (方法 2).

2.1 介电常数滤波器法(方法 1)

用介电常数描述媒质的色散性, 考虑无源情况下的时域安培定律:

$$\nabla \times \mathbf{H}(t) = \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \quad (1)$$

其中
$$D(t) = \varepsilon(t) * E(t) \quad (2)$$

对式(2)式进行 Z 变换, 若将 $E(t)$ 视作系统输入信号, $D(z)$ 为输出信号, 则复介电常数 $\varepsilon(z)$ 为该系统的传输函数:

$$\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{N_b} z^{-N_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{N_a} z^{-N_a}} \quad (3)$$

根据 DSP 技术, 由式(3)可直接导出色散媒质的时域差分方程^[7,8], 考虑沿 x 向传播的一维平面电磁波(E_z, H_y), 其 FD-FDTD 方程如下:

$$H_{y,k}^{n+1/2} = H_{y,k}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_{z,k+1/2}^n - E_{z,k-1/2}^n] \quad (4)$$

$$D_{z,k+1/2}^{n+1} = D_{z,k+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [E_{y,k+1}^{n+1/2} - H_{y,k}^{n+1/2}]$$

$$E_{z,k+1/2}^{n+1} = \frac{1}{b_0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} [D_{z,k+1/2}^{n+1} + a_{1,k+1/2} D_{z,k+1/2}^n + \dots + a_{N_a,k+1/2} D_{z,k+1/2}^{n-N_a}] - b_{1,k+1/2} E_{z,k+1/2}^n - b_{2,k+1/2} E_{z,k+1/2}^{n-1} - \dots - b_{N_b,k+1/2} E_{z,k+1/2}^{n-N_b} \right\}$$

类似地可导出二维或三维 FD-FDTD 方程组.

2.2 电导系数滤波器(方法 2)

将时域安培定律写为电导系数的形式(同样只考虑无源区):

$$\nabla \times \mathbf{H}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} + \mathbf{J}_c(t) \quad (5)$$

$$\text{其中 } \varepsilon_r \text{ 为常数, 即非色散的, 而 } \mathbf{J}_c(t) = \sigma(t)^* \mathbf{E}(t) \quad (6)$$

同样将电导率 $\sigma(Z)$ 视作系统传递函数, 表示成以下形式:

$$\sigma(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{N_d-1} z^{-(N_d-1)}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_N z^{-N_c}} \quad (7)$$

相应的一维 FD- FDTD 方程为:

$$E_{z, k+1/2}^{n+1} = E_{z, k+1/2}^n - \frac{\Delta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \Delta x} [H_{y, k+1}^{n+1/2} - H_{y, k}^{n+1/2}] - \frac{\Delta}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} J_{c, k+1/2}^{n+1/2} \quad (8)$$

在 FDTD 迭代中, 电场强度、电通量密度的值 $t = n\Delta t$ 是时刻的, 而磁场强度的值则与它们相差半个时间步长, 因此感应电流密度取平均值, 在 z 域中则表示为:

$$J_{c, k+1/2}(z) = \frac{1}{2} (J_{c, k+1/2}(z) + z^{-1} J_{c, k+1/2}(z)) \quad (9)$$

$$\text{式(8)可以写成: } E_{z, k+1/2} F(z) = - \frac{\Delta}{\varepsilon_0 \Delta x} [H_{y, k+1} - H_{y, k}] \quad (10)$$

$$\text{其中: } F(z) = \varepsilon_r (1 - z^{-1}) + \frac{\Delta}{2\varepsilon_0} (1 + z^{-1}) \sigma(z) \quad (11)$$

写出 $F(z)$ 的有理式形式:

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots + e_{N_e-1} z^{-(N_e-1)}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_N z^{-N_c}} \quad (12)$$

其中: $e_0 = \varepsilon_r + (\Delta/2\varepsilon_0) d_0$, $e_n = \varepsilon_r (c_{n-1} - 1) + (\Delta/2\varepsilon_0) (d_0 + d_1) + \dots + \varepsilon_r (c_n - c_{n-1}) + (\Delta/2\varepsilon_0) (d_n + d_{n-1})$, $N_e = \max\{N_c + 1, N_d\}$. 于是基于电系数的一维 FD- FDTD 方程为:

$$I_{z, k+1/2}^{n+1/2} = - \frac{\Delta}{\varepsilon_0 \Delta x} [H_{y, k+1}^{n+1/2} - H_{y, k}^{n+1/2}] \quad (13)$$

$$E_{z, k+1/2}^{n+1} = \frac{1}{e_0} \{ I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - c_1 I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - c_2 I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - \dots - c_N I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - e_1 I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - e_2 I_{z, k+1/2}^{n+1/2} - \dots - e_N I_{z, k+1/2}^{n+1/2} \}$$

二维或三维方程组可同样导出.

2.3 方法比较

如果将法拉第定律也表示成式(10)的形式, 则对复介电常数模型有:

$$F(z) = \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} (1 - z^{-1}) \quad (14)$$

$\varepsilon(t)$ 和 $\sigma(z)$ 可以通过式(15)转换:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 [\varepsilon_r + \frac{\Delta}{2\varepsilon_0} \frac{(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \sigma(z)] \quad (15)$$

但这样可能使模拟色散媒质特性的 IIR 滤波器的传递函数阶数增高, 从而增加计算复杂度, 更好的方法是采用式(14).

以肌肉为例, 考虑一种肌肉组织的近似模型:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_1}{1 + j\omega\tau} + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} \quad (16)$$

用冲激响应不变法进行 IIR 设计, 得到传递函数:

$$\varepsilon(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-\Delta/\tau} z^{-1})} \quad (17)$$

其中 $b_0 = \varepsilon_r + \varepsilon_1 \Delta/\tau + \sigma\Delta/\varepsilon_0$, $b_1 = -\varepsilon_r(1 + e^{-\Delta/\tau}) - \varepsilon_1 \Delta/\tau$

$- \sigma\Delta/\varepsilon_0 e^{-\Delta/\tau}$, $b_2 = \varepsilon_r e^{-\Delta/\tau}$. 由于该传递函数包含一个单位圆上的极点, 会使算法出现不稳定. 但如果应用式(14)则可以得到式(18)表示的传递函数:

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{\varepsilon_0 (1 - e^{-\Delta/\tau} z^{-1})} \quad (18)$$

上式剔除了单位圆上的极点, 从而提高了 FD- FDTD 算法的稳定性.

3 数值稳定性及数值色散

由于 FD- FDTD 算法中引入了 IIR 滤波器模拟色散媒质, 因此与传统 FDTD 方法相比, 其数值稳定性和数值色散都更为复杂, 不仅与网格剖分、信号频率及波在网格中的传播有关, 而且与滤波器系统的稳定性(极点)有关.

考虑均匀色散媒质, 安培定律在 z 域描述为(以 E_x 场分量为例):

$$E_{x, i, j, k+1/2} F(z) = \frac{\Delta}{\varepsilon_0} \{ \frac{1}{\Delta y} [H_{z, i, j+1, k} - H_{z, i, j, k}] - \frac{1}{\Delta z} [H_{y, i, j, k+1} - H_{y, i, j, k}] \} \quad (19)$$

定义一种类似于 z 变换性质的空间变换:

$$\tilde{A}(U, V, W, Z) = \sum_{m=1}^{N_i} \sum_{n=1}^{N_j} \sum_{p=1}^{N_k} A(Z) U^m V^n W^p \quad (20)$$

式中 N_i, N_j, N_k 表示 FDTD 的空间网格数, A 表示任意场量. 对式(19)应用这一变换:

$$\tilde{E}_x F(Z) = \frac{\Delta}{\varepsilon_0} \{ \frac{1}{\Delta y} (V^{-1} - 1) \tilde{H}_z - \frac{1}{\Delta z} (W^{-1} - 1) \tilde{H}_y \} \quad (21)$$

类似的可以得到:

$$(Z - 1) \tilde{H}_y = \frac{\Delta}{\mu_0} \{ \frac{1}{\Delta x} (1 - U) \tilde{E}_z - \frac{1}{\Delta z} (1 - W) \tilde{E}_x \} \quad (22)$$

$$(Z - 1) \tilde{H}_z = \frac{\Delta}{\mu_0} \{ \frac{1}{\Delta y} (1 - V) \tilde{E}_x - \frac{1}{\Delta z} (1 - U) \tilde{E}_y \} \quad (23)$$

将式(22)、(23)代入(21)得到 FD- FDTD 的色散关系通式:

$$(Z - 1) \tilde{E}_x F(z) = \frac{\Delta^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \{ \frac{1}{\Delta y^2} (V - 2 + V^{-1}) \tilde{E}_x + \frac{1}{\Delta z^2} (W - 2 + W^{-1}) \tilde{E}_x - \frac{1}{\Delta x \Delta y} (V^{-1} - 1) (1 - U) \tilde{E}_y - \frac{1}{\Delta x \Delta z} (W^{-1} - 1) (1 - U) \tilde{E}_z \} \quad (24)$$

在无源区上式可以写成以下二阶齐次偏微分方程:

$$(Z - 1) \tilde{E}_x F(z) = \frac{\Delta^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \{ \frac{1}{\Delta x^2} (U - 2 - U^{-1}) + \frac{1}{\Delta y^2} (V - 2 + V^{-1}) + \frac{1}{\Delta z^2} (W - 2 + W^{-1}) \} \tilde{E}_x \quad (25)$$

若令式(20)的变换为: $U = e^{j k_x \Delta x}$, $V = e^{j k_y \Delta y}$, $W = e^{j k_z \Delta z}$, 并令 $Z = e^{j \omega \Delta}$, 则:

$$(e^{j \omega \Delta} - 1) F(Z) = \frac{\Delta^2}{\mu_0 \varepsilon_0} \{ \frac{1}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k_x \Delta x}{2}) + \frac{1}{\Delta y^2} \sin^2(\frac{k_y \Delta y}{2}) + \frac{1}{\Delta z^2} \sin^2(\frac{k_z \Delta z}{2}) \} \quad (26)$$

将变量 Z 看作 FDTD 中场强从时间步 n 到 $n+1$ 的增益, 线性系统的稳定性条件要求 $|Z| \leq 1$. 因此 FD- FDTD 中的空间和时间步长的取值必须使方程(26)的所有根都满足 $|Z|$

$< = 1$, 这就是 FD- FDTD 的稳定性条件.

上述推导对有源区仍然适用, 但必须将式(25)改写为二阶非齐次偏微分方程, 即加入电流源 J_s 的影响.

4 IIR 滤波器设计

典型的 IIR 滤波器设计方法有冲激响应不变法、双线性变换法及比特沃思设计方法等, 受篇幅限制, 本文主要讨论冲激响应不变法在色散媒质模拟上的应用, 其它方法将另文讨论.

冲激响应不变法是将数字滤波器的单位取样响应当作模拟滤波器冲激响应的等间隔取样. 实际上是将 s 平面中每一带状区(虚轴上每一段长为 $2\pi/T$ 的部分)的左半边映入 Z 平面单位圆内. 设一阶模拟系统为: $G(S) = A/(s + \alpha)$, 其数字转移函数为:

$$H(z) = \frac{\Delta \cdot A}{1 - e^{-\alpha \Delta} z^{-1}} \quad (27)$$

若二阶模拟系统为: $G(s) = \beta / [(s - \alpha)^2 + \beta^2]$, 则其数字转移函数为:

$$H(z) = \frac{\Delta \cdot z e^{\alpha \Delta} \sin(\beta \cdot \Delta)}{z^2 - z[2e^{\alpha \Delta} \cos(\beta \cdot \Delta)] + e^{2\alpha \Delta}} \quad (28)$$

任意系统 $G(s)$ 总可以分成一阶和二阶系统的并联或级联, 所以由式(27)、(28)可实现任意系统的数字转换. 值得注意的是, 在通常的数字滤波器设计应用中, 为避免严重的混叠失真, 冲激响应不变法一般仅适合于限带滤波器设计. 但在本文的应用中, 由于媒质色散特性的任意性, 不能用某种标准的低通、带通或高通滤波器来表征媒质, 正好可以利用冲激响应不变法的混叠效应, 更好地模拟媒质的色散性.

5 计算实例

为了验证上述方法的正确性和有效性, 本文给出了两个算例.

5.1 Debye 型色散媒质的 IIR 滤波器模拟

Debye 型色散媒质的相对介电常数的频域函数描述为^[3]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau} \quad (29)$$

转换到 Z 域, 媒质的色散关系表示如下:

$$\varepsilon(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (30)$$

式中参数应用冲激响应不变法得到:

$$a_1 = -e^{-\Delta/\tau}, \quad b_0 = \varepsilon_{\infty} + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})\Delta}{\tau}, \quad b_1 = -\varepsilon_{\infty} e^{-\Delta/\tau} \quad (31)$$

设水的参数为: $\varepsilon_s = 81$, $\varepsilon_{\infty} = 1.8$, $\tau = 25$ ps. 用上式建立 IIR 数字滤波器, 并计算其频域特性, 即幅频响应及相频响应特性, 并与色散媒质的实际频域特性进行对比, 结果如图 1 所示. 图中实线代表色散媒质的实际色散特性曲线, 加号代表 IIR 数字滤波器的响应曲线. 图 1(a) 为幅频响应曲线, 图 1(b) 为相频响应曲线. 显然, 采用冲激响应不变法设计的滤波器能非常好地表征、模拟 Debye 型媒质的色散特性.

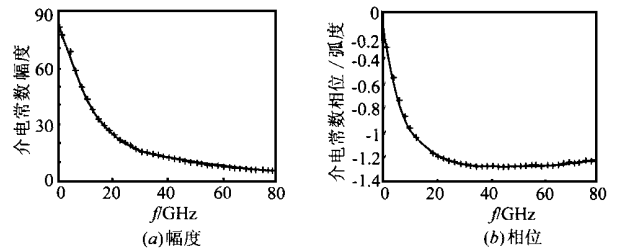


图 1 水的频域特性

5.2 N 阶色散媒质瞬时传播特性和反射系数

在以上基础上为了进一步验证上述色散媒质用 FDTD 分析和计算的有效性和正确性, 我们推导出了色散媒质的时域有限差分方程组, 并采用这种改进的时域有限差分方法进行色散媒质瞬态电磁特性的分析与计算. 我们分别计算分析了脉冲平面波垂直入射于自由空间和 N 阶色散媒质(Lorentz 型)分界面的情况. 取 4 阶色散媒质, 即含有两个二阶 Lorentz 极点的媒质, 其介电常数的参数取: $\varepsilon_s = 3.0$, $\varepsilon_{\infty} = 1.5$, $f_1 = 20$ GHz, $f_2 = 50$ GHz, $\delta_1 = 0.1\omega_1$, $\delta_2 = 0.1\omega_2$, $G_1 = 0.4$, $G_2 = 0.6$. 计算中取时间步长 $\Delta t = 0.0625$ ps, $\Delta x = 37.5$ μm, 垂直入射波取波宽为 12.5ps 的高斯脉冲平面波. 空间网格取 2000 格, 色散媒质与空气的分界面设在 1000 格上. 同时, 在网格的两端建立一阶 Mur 吸收边界条件^[19].

色散媒质与空气分界面的反射系数可从 FDTD 计算所得反射波的时间序列经 DFT 变换求得. 反射波时间序列是网格 1001 上每时间步上的总场减去相应时刻的入射波, 经过 DFT 变换即得到频域值, 进而求出反射系数的模值和相位值. N 阶色散媒质反射系数的数值计算结果(+) 和解析结果(实线) 示于图 2. 其模值和相位值都基本吻合, 仅在高频部分存在一些微小的误差, 这是由于网格的剖分和 DFT 转换时, 一部分高频能量丢失所造成的. 可见对于我们所讨论的这两种类型的色散媒质, 应用 IIR 数字滤波器表征并模拟其特性是正确并且有效的, 而在此基础上形成的 FD- FDTD 方法同样有效.

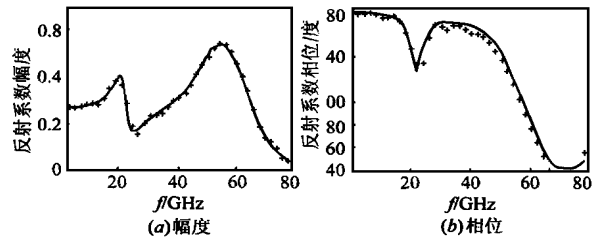


图 2 N 阶色散媒质反射系数的 FDTD 计算结果(+) 和解析结果(实线)

6 结论

本文用一组无限冲击响应滤波器(IIR) 模拟色散媒质特性, 采用 DSP 技术确定数字滤波器系数, 并对传统 FDTD 方程进行改进. 提出了采用介电常数和电导系数进行滤波器模拟并形成色散媒质 FDTD 算法的两种方法, 深入探讨并给出了新方法的稳定性条件及数值色散关系. 所给出的数值算例验证了 IIR 滤波器用于模拟媒质色散特性的正确性. 另一方面,

模拟了高斯脉冲信号入射空气- N 阶色散媒质分界面的电磁波瞬态传播情况, 研究表明采用这种基于 DSP 技术的 FDTD 算法能够很好地模拟色散媒质中瞬态电磁波的传播特性, 为色散媒质时域电磁场分析提供了新思路.

参考文献:

- [1] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Trans. AP, 1996, 14(5): 302- 307.
- [2] K L Shlager and J B Schneider. A selective survey of the finite difference time domain literature [J]. IEEE. AP. Mag, 1995, 37(8): 39- 57.
- [3] R Luebbers, F P Hunsberger. FDTD for Nth Order Dispersive Media [J]. IEEE Trans. AP, 1992, 40: 1297- 1301.
- [4] R Luebbers, F P Hunsberger, K S Kunz, et al. A frequency dependent finite difference time domain formulation for dispersive materials [J]. IEEE Trans. EMC, 1990, 32: 222- 227.
- [5] D M Sullivan. Frequency dependent FDTD methods using z transforms [J]. IEEE. Trans. AP, 1992, 40(8): 1223- 1230.
- [6] Benqin Gao, et al. A FDTD method for dispersive media [J]. Sin. Chirna, 1994, 24: 538- 545.
- [7] W H Weedom. A general method for FDTD modeling of wave propagation in arbitrary frequency dispersive media [J]. IEEE. Trans. AP, 1997, 45(3): 401- 409.

- [8] 汪彤等. 采用 DSP 技术的色散媒质 FDTD 方法 [J]. 中国学术期刊文摘, 1999, 5(12): 1556- 1558.
- [9] 张文俊等. N 阶色散媒质的瞬态散射特性 [J]. 微波学报, 1996, 12: 9- 14.
- [10] G Mur. Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time domain electromagnetic field equations [J]. IEEE Trans. EMC, 1981, 23: 377- 382.

作者简介:



场、电磁兼容等.

汪 彤 女. 1968 年 8 月出生于江西, 1990 年毕业于华东师范大学电子科学技术系, 同年直升就读于本系研究生. 1993 年获硕士学位后分配至上海大学通信学院工作, 97 年 9 月开始攻读博士学位. 先后作为主研人员承担并完成国家自然科学基金、上海市自然科学基金及部委等多项科研项目. 主要研究领域: 电磁场数值计算方法、瞬变电磁

张文俊 男. 1959 年 11 月生于上海. 教授, 博士生导师, 1978 年考入复旦大学, 1979 年由国家教委公派赴贝尔格莱德大学电工学院学习, 并于 1989 年获博士学位. 回国后先后负责承担多项国家自然科学基金、上海市自然科学基金及部委项目, 主要研究领域: 电磁场数值计算方法、瞬变电磁场、光纤技术、数字通信等.

(上接第 784 页)

参考文献:

- [1] Dauguet, et al. Microstrip antenna with polarization switching [J]. Microw. Opt. Tech. Lett., Jan. 1994, 7(1): 36- 40.
- [2] P M Haskins and J S Dahele. Varactor diode loaded passive polarization agile patch antenna [J]. Electron. Lett., Apr. 1994, 30(13): 1074 - 1075.
- [3] S S Zhong, J Liu, and M Ahmed. Polarization agile microstrip antenna with phase shifters [C]. JINA' 98, Nice, 1998: 738- 741.
- [4] P M Haskins and J S Dahele. Four element varactor diode loaded polarization agile microstrip antenna array [J], Electron. Lett., July 1997,

33(14): 1186- 1187.

- [5] P M Haskins and J S Dahele. Polarization agile active microstrip patch arrays [J]. Electron. Lett., March 1996, 32(6): 509- 511.
- [6] 钟顺时. 微带天线理论与应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1991: 18- 31.
- [7] S C Gao and S S Zhong. Dual polarized microstrip antenna array with high isolation fed by coplanar network [J]. Microw. Opt. Tech. Lett., Oct. 1998, 19(3): 214- 216.
- [8] 高式昌. 用于有源集成的微带天线单元与双极化阵列 [D]. 上海大学博士学位论文, 1999, 4: 67- 68.
- [9] 高式昌, 钟顺时. 并行角馈双极化微带天线阵的分析与设计 [J]. 电子科学学刊, 1999, 21(4): 529- 534.